MAPPE DI KARNAUGH E SINTESI OTTIMA

(PRIMA STESURA DA RIVEDERE)

Sappiamo che una funzione logica può essere espressa in diverse forme, tra loro equivalenti e noi siamo già in grado di passare da una all'altra.

Introduciamo ora un nuovo metodo di rappresentazione che si renderà particolarmente utile per la minimizzazione delle funzioni logiche.

Tale metodo consiste nel costruire delle mappe che contengono un numero di caselle uguale al numero di combinazioni possibili con il numero di variabili binarie date. Se n è il numero di variabili binarie il numero di caselle sarà sempre 2^n.

Ogni casella di tale mappa è associata ad una delle 2^n combinazioni possibili delle n variabili binarie.

Tale associazione è fatta in modo che due caselle "adiacenti" sono associate a combinazioni che differiscono tra loro per una sola variabile, che compare diritta in una e negata nell'altra.

				00000
				00001
				00011
				00010
				00110
				00111
				00101
				00100
			0000	01100
			0001	01101
			0011	01111
			0010	01110
		000	0110	01010
		001	0111	01011
	00	011	0101	01001
0	01	010	0100	01000
1	11	110	1100	11000
	10	111	1101	11001
		101	1111	11011
		100	1110	11010
			1010	11110
			1011	11111
			1001	11101
			1000	11100
				10100
				10101
				10111
				10110
				10010
				10011
				10001
				10000

A tale proposito è opportuno qui introdurre il Codice binario riflesso o **Codice Gray**, che viene costruito come esposto a fianco e che ha appunto la proprietà che devono avere le due combinazioni di due caselle "adiacenti" in una Mappa di Karnaugh.

Seguendo questo criterio si costruiscono le Mappe di Karnaugh di due, tre, quattro e cinque variabili che riportiamo di seguito.

Dentro ogni casella abbiamo riportato la combinazione delle variabili, il mintermine che inserirebbe un 1 in quella casella, il maxtermine che inserirebbe uno 0 in quella casella.

<u>La variabile A è sempre il MSB, mentre l'ultima lettera in ordine alfabetico presente è sempre il LSB.</u>

B \ A	**0**	**1**
0	**P0, S0, 00**	**P2, S2, 10**
1	**P1, S1, 01**	**P3, S3, 11**

Mappa di Karnaugh di due variabili.

Tutte le caselle risultano ovviamente "adiacenti" e nel passare da una all'altra c'è sempre la variazione di una sola variabile da diritta a negata o viceversa.

AB / C	00	01	11	10
0	P0, S0, 000	P2, S2, 010	P6, S6, 110	P4, S4, 100
1	P1, S1, 001	P3, S3, 011	P7, S7, 111	P5, S5, 101

Mappa di Karnaugh di tre variabili.

Risultano “adiacenti” (cioè tali che nel passare da una all’altra c’è sempre la variazione di una sola variabile da diritta a negata o viceversa) non solo le caselle fisicamente adiacenti ma anche la prima e l’ultima casella della stessa riga.

AB / CD	00	01	11	10
00	P0, S0, 0000	P4, S4, 0100	P12, S12, 1100	P8, S8, 1000
01	P1, S1, 0001	P5, S5, 0101	P13, S13, 1101	P9, S9, 1001
11	P3, S3, 0011	P7, S7, 0111	P15, S15, 1111	P11, S11, 1011
10	P2, S2, 0010	P6, S6, 0110	P14, S14, 1110	P10, S10, 1010

Mappa di Karnaugh di quattro variabili.

Risultano “adiacenti” (cioè tali che nel passare da una all’altra c’è sempre la variazione di una sola variabile da diritta a negata o viceversa) non solo le caselle fisicamente adiacenti ma anche la prima e l’ultima casella della stessa riga e della stessa colonna.

ABC / DE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	P0, S0, 00000	P4, S4, 00100	P12, S12, 01100	P8, S8, 01000	P24, S24, 11000	P28, S28, 11100	P20, S20, 10100	P16, S16, 10000
01	P1, S1, 00001	P5, S5, 00101	P13, S13, 01101	P9, S9, 01001	P25, S25, 11001	P29, S29, 11101	P21, S21, 10101	P17, S17, 10001
11	P3, S3, 00011	P7, S7, 0111	P15, S15, 01111	P11, S11, 01011	P27, S27, 11011	P31, S31, 11111	P23, S23, 10111	P19, S19, 10011
10	P2, S2, 00010	P6, S6, 00110	P14, S14, 01110	P10, S10, 01010	P26, S26, 11010	P30, S30, 11110	P22, S22, 10110	P18, S18, 10010

Mappa di Karnaugh di cinque variabili. La Mappa può essere spezzata nelle due mappe seguenti:

BC / DE	00	01	11	10
00	P0, S0, 00000	P4, S4, 00100	P12, S12, 01100	P8, S8, 01000
01	P1, S1, 00001	P5, S5, 00101	P13, S13, 01101	P9, S9, 01001
11	P3, S3, 00011	P7, S7, 0111	P15, S15, 01111	P11, S11, 01011
10	P2, S2, 00010	P6, S6, 00110	P14, S14, 01110	P10, S10, 01010

A=0

BC / DE	00	01	11	10
00	P16, S16, 10000	P20, S20, 10100	P28, S28, 11100	P24, S24, 11000
01	P17, S17, 10001	P21, S21, 10101	P29, S29, 11101	P25, S25, 11001
11	P19, S19, 10011	P23, S23, 10111	P31, S31, 11111	P27, S27, 11011
10	P18, S18, 10010	P22, S22, 10110	P30, S30, 11110	P26, S26, 11010

A=1

Per ciascuna delle ultime due Mappe risultano “adiacenti” (cioè tali che nel passare da una all’altra c’è sempre la variazione di una sola variabile da diritta a negata o viceversa) non solo le caselle fisicamente adiacenti ma anche la prima e l’ultima casella della stessa riga e della stessa colonna, come nel caso delle mappe di quattro variabili. In questo caso però risultano adiacenti anche le caselle che si trovano nella stessa posizione tra la mappa di destra e quella di sinistra, cioè ciascuna casella della mappa A=0 è adiacente alla corrispondente casella della Mappa A=1, e viceversa.

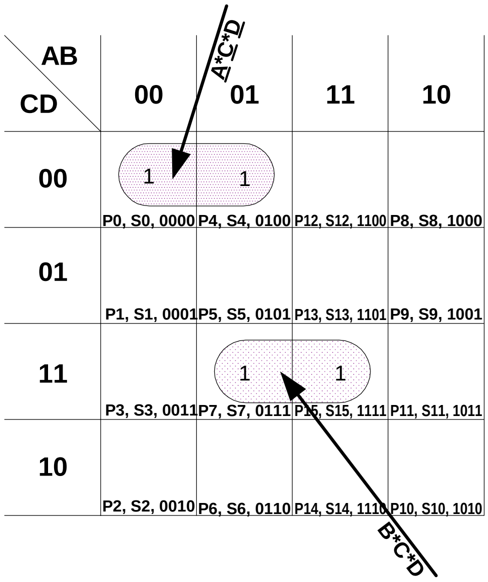
Per comprendere l’utilizzo delle Mappe così costruite nella minimizzazione delle funzioni logiche partiamo da un esempio.

ESEMPIO 1: Supponiamo di avere una funzione logica di quattro variabili che presenti solo i Prodotti canonici (mintermini) 0, 4, 7, 15, cioè:

$$f(A,B,C,D)=\sum(0,4,7,15)=\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}*\overline{D}+\overline{A}*B*\overline{C}*\overline{D}+\overline{A}*B*C*D+A*B*C*D$$

Sappiamo già semplificare algebricamente la funzione. Infatti:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}*\overline{D}+\overline{A}*B*\overline{C}*\overline{D}+\overline{A}*B*C*D+A*B*C*D=$$
$$=\overline{A}*\overline{C}*\overline{D}*(\overline{B}+B)+B*C*D*(\overline{A}+A)=\overline{A}*\overline{C}*\overline{D}+B*C*D$$

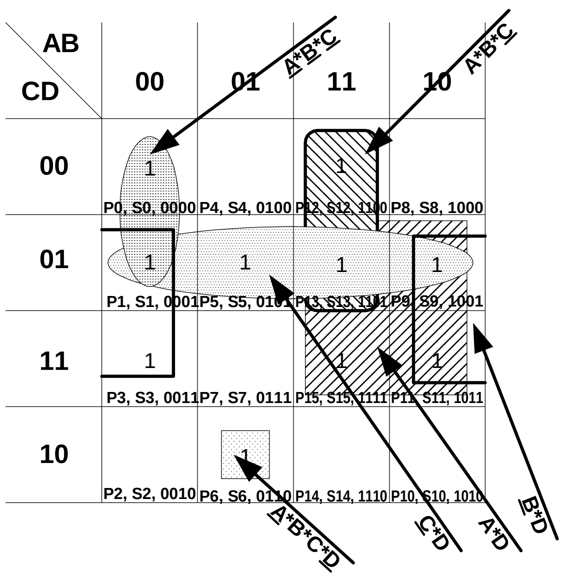


I quattro termini di quattro variabili sono stati sostituiti da due termini di tre variabili; in ognuno di questi due termini è stata eliminata la variabile che compariva diritta in un mintermine e negata nell’altro; sono invece rimaste in ciascuna coppia le variabili che non variavano nel passare da uno all’altro mintermine di ciascuna coppia.
Questo esempio ci indica una strada per l’utilizzo delle Mappe di Karnaugh per la minimizzazione. Quando in una mappa due 1 compaiono in due celle adiacenti si può procedere direttamente alla minimizzazione sostituendo i due mintermini con un unico prodotto (non canonico) composto dalle variabili che non variano tra le due celle adiacenti e eliminando la variabile che varia.

Vediamo altri esempi che possono chiarire meglio l’uso delle Mappe di Karnaugh.

ESEMPIO 2: Sia data la funzione:

$$f(A,B,C,D)=\sum(0,1,3,5,6,9,11,12,13,15)$$



Dalla Mappa riportata a fianco si vede che la funzione può essere minimizzata nella seguente espressione:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*B*C*\overline{D}+\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}+$$
$$A*B*\overline{C}+\overline{C}*D+A*D+\overline{B}*D$$

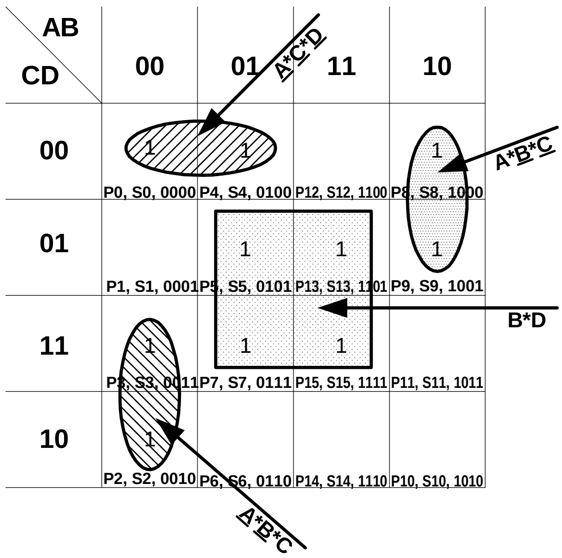
Notiamo che lo stesso 1, cioè lo stesso mintermine, può, se serve per minimizzare ulteriormente l’espressione, essere utilizzato più volte. Ciò deriva dal fatto che:

$$A+A+A........+A=A$$

Vediamo ancora un esempio.

ESEMPIO 3: Sia data la funzione:

$$f(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,4,5,7,8,9,13,15)$$



Dalla Mappa riportata a fianco si vede che la funzione può essere minimizzata nella seguente espressione:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*\overline{C}*\overline{D}+A*\overline{B}*\overline{C}+ +\overline{A}*\overline{B}*C+B*D$$

In generale una Mappa di Karnaugh può essere semplificata in diversi modi. secondo quale modo scegliamo per raggruppare insieme più 1 adiacenti, otteniamo una o un'altra forma minimizzata della funzione.

Vogliamo ora dare dei criteri generali che permettano di arrivare alla **"sintesi ottima"** o **"a costo minimo"** di una funzione.

Per fare ciò cominciamo col definire due **CRITERI DI COSTO** di una rete logica:

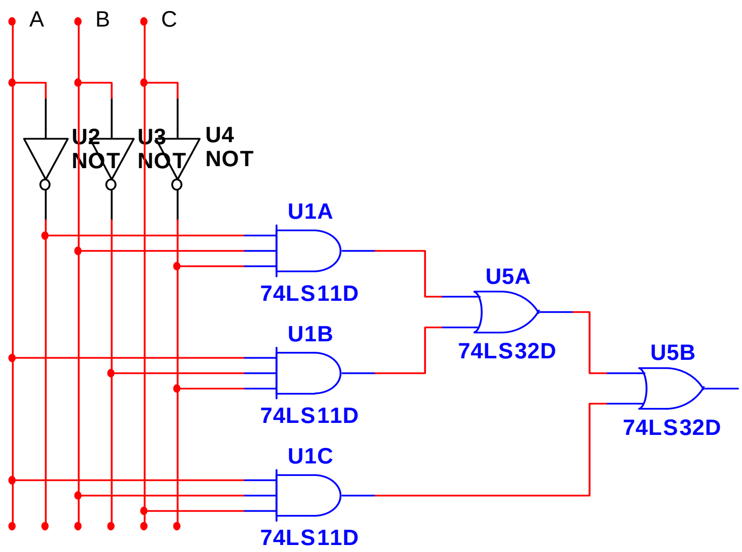
- **Chiameremo** COSTO IN PORTE (C_p) **il numero totale di porte logiche (NOT esclusi) necessarie per realizzare una funzione.**
- **Chiameremo** COSTO IN INGRESSI (Ci) **il numero totale di ingressi (ingressi dei NOT esclusi) che occorrono complessivamente nella rete. Tale costo è quindi uguale al numero delle porte necessarie, ciascuna moltiplicata per il numero dei suoi ingressi.**

La **sintesi ottima** sarà quella che avrà il **COSTO MINIMO** sia in porte sia in ingressi.

ESEMPIO 4: Sia data la funzione:

$$f(A,B,C)=\overline{A}*B*\overline{C}+A*\overline{B}*\overline{C}+A*B*C$$

Per realizzare tale funzione, posto che ogni variabile sia disponibile sia diritta sia negata e quindi trascurando le porte NOT, sono necessarie tre porte AND ed una porta OR. Il costo in porte è quindi $C_p=4$.
Ogni porta AND ha tre ingressi, come pure la porta OR. Quindi il costo in ingressi è $C_i=12$.
Lo schema riporta il circuito logico che realizza la funzione data. Vengono utilizzati due Circuiti Integrati: il 74LS11 (TRIPLE 3-INPUT AND GATE) e il 74LS32 (QUADRUPLE 2-INPUT OR GATE). Del primo vengono utilizzate tutte e tre le porte AND disponibili. Del secondo sono utilizzate due delle quattro porte OR disponibili. Nella famiglia TTL LS non è presente il Circuito integrato con tre porte OR a tre ingressi.



Cerchiamo ora di dare una spiegazione dei criteri di costo individuati.

La scelta del **numero di porte** necessarie per realizzare un dato circuito quale parametro da rendere minimo, è abbastanza intuitiva. All'aumentare del numero di porte aumenterà, di solito, il numero di Circuiti Integrati (di seguito IC) necessari per realizzare una data funzione logica. Abbiamo già visto che per realizzare le tre operazioni AND dell'esempio precedente può essere utilizzato il 74LS11; sarebbe bastata un'altra sola operazione AND da realizzare per imporre l'uso di un secondo IC.

Meno intuitiva, ma non per questo meno importante, è la scelta del **numero totali di ingressi** quale criterio di costo. Infatti gli IC sono disponibili con un numero standard di piedini (PIN) che è o 14 o 16. Due di essi sono sempre utilizzati uno per l'alimentazione ed uno per la massa. Ne restano disponibili per gli ingressi o le uscite 12 o 14. Quindi in un determinato IC possono essere contenute solo un certo numero di porte con un certo numero di ingressi; a titolo d'esempio per le porte AND, nella famiglia TTL-LS serie 74, sono disponibili solo le seguenti combinazioni:

SN74LS08 QUADRUPLE 2-INPUT POSITIVE-AND GATES http://focus.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls08.pdf

SN74LS11 TRIPLE 3-INPUT POSITIVE-AND GATES http://focus.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls11.pdf

SN74LS21 DUAL 4-INPUT POSITIVE-AND GATES http://focus.ti.com/lit/ds/symlink/sn74ls21.pdf

Risulta quindi evidente come il numero complessivo degli ingressi sia un criterio fondamentale per determinare il costo di una rete. Se nella rete precedente ci fosse stato un solo AND con quattro invece che con tre ingressi, non avremmo potuto implementare tutte le operazioni AND con il solo 74LS11 ma avremmo dovuto utilizzare anche un 74LS21.

Da quanto detto deriva che il nostro obiettivo è di **individuare un metodo da seguire** per ottenere, attraverso l'uso delle Mappe di Karnaugh, la sintesi ottima di una rete, intendendo per sintesi ottima quella che presenta il minor costo sia in porte sia in ingressi.

Per arrivare ad enunciare tale metodo, cominciamo col dare **alcune definizioni** che nel seguito risulteranno fondamentali.

> **Chiameremo <u>IMPLICANTE</u> di una funzione qualsiasi prodotto delle variabili della funzione, non necessariamente tutte, tale che, se esso vale 1, anche la funzione vale 1.**

Chiariamo la definizione con un esempio:

> *ESEMPIO 5: sia data la funzione:* $f(A,B,C)=\sum(0,1,2,3,5)$
>
> *Troviamo tutti gli implicanti della funzione iniziando col costruire la Mappa di Karnaugh della funzione e su di essa individuiamo tutti gli 1 singoli e tutte le possibili combinazioni di 1 adiacenti.*

C \ AB	00	01	11	10
0	1 P0, S0, 000	1 P2, S2, 010	P6, S6, 110	P4, S4, 100
1	1 P1, S1, 001	1 P3, S3, 011	P7, S7, 111	1 P5, S5, 101

Sono IMPLICANTI della funzione:

- *Tutti i mintermini della funzione, corrispondenti agli 1 singoli della Mappa, cioè:*

$$\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}, \overline{A}*B*\overline{C}, \overline{A}*\overline{B}*C, \overline{A}*B*C, A*\overline{B}*C$$

- *Tutti i prodotti delle variabili che sono associati a due 1 adiacenti. Cioè:*

$$\overline{A}*\overline{B}, \overline{A}*B, \overline{A}*\overline{C}, \overline{A}*C, \overline{B}*C$$

- *La variabile associata ai quattro 1 adiacenti:* $\overline{A}$

Quindi la funzione ha 11 IMPLICANTI.

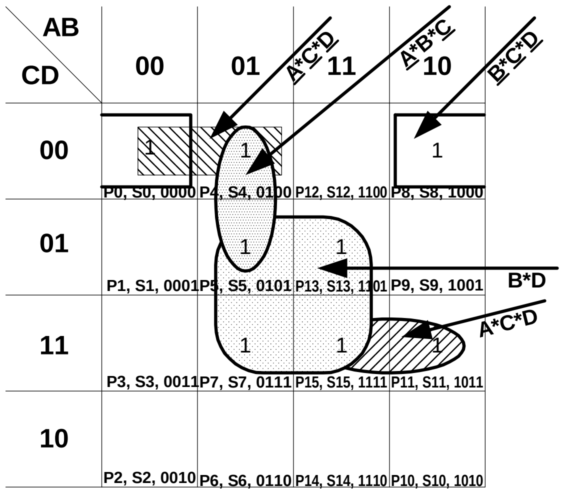
Appare evidente che non tutti gli implicanti hanno lo stesso "peso" nella minimizzazione di una funzione logica. In particolare nell'ultimo esempio l'implicante che copre quattro 1 e porta a $\overline{A}$ e l'implicante che copre due 1 e porta a $\overline{B}*C$, sono diversi dagli altri. Essi sono gli unici a non essere coperti completamente da nessun altro implicante. Implicanti con queste caratteristiche prendono il nome di **IMPLICANTI PRINCIPALI**. Diamone la definizione:

Prende il nome di <u>IMPLICANTE PRINCIPALE (IP)</u> della funzione ogni Implicante che nella Mappa di Karnaugh non è "coperto" completamente da nessun altro Implicante.

Dalla definizione di Implicante Principale deriva che ogni funzione logica può essere rappresentata da una somma di IP, cioè da un'espressione SP PRINCIPALE.

Vediamo un altro esempio.

ESEMPIO 6: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(0,4,5,7,8,11,13,15)$



Gli implicanti principali della funzione sono quelli riportati nella Mappa.

Quindi la forma SP PRINCIPALE della funzione è:

$$f(A,B,C,D)=B*D+\overline{B}*\overline{C}*\overline{D}+\overline{A}*B*\overline{C}+$$
$$+\overline{A}*\overline{C}*\overline{D}+A*C*D$$

Notiamo che tale forma non è quella a costo minimo. Infatti è presente in essa un IP che è coperto da due altre IP.

Evidentemente anche gli IP non sono tutti uguali.

Diamo un'ulteriore definizione:

Una forma SP di una funzione logica si dice NON RIDONDANTE se e solo se:

A. tutti i termini della forma SP sono IP della funzione, cioè se e solo se l'espressione è la forma SP Principale della funzione;

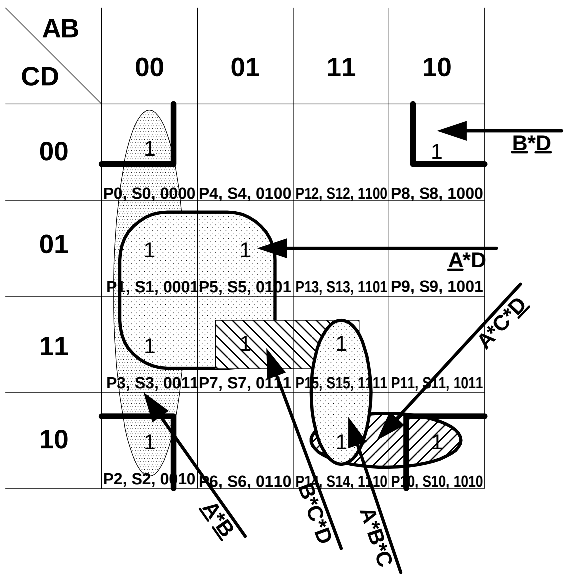
B. nessuno degli IP della forma SP è coperto dalla somma di altri IP della funzione.

Tornando all'ultimo esempio possiamo affermare che l'ultima forma SP trovata è ridondante poiché, pur soddisfacendo la condizione A) giacché è una forma SP Principale, non soddisfa la condizione B) poiché l'IP $\overline{A}*\overline{C}*\overline{D}$ è coperto dalla somma degli IP $\overline{A}*B*\overline{C}$ e $\overline{B}*\overline{C}*\overline{D}$.

Quindi l'espressione trovata è ridondante e di conseguenza è riducibile fino ad arrivare ad un'espressione di costo inferiore. Tale espressione è la seguente:

$$f(A,B,C,D)=B*D+\overline{B}*\overline{C}*\overline{D}+\overline{A}*B*\overline{C}+A*C*D$$

ESEMPIO 7: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,3,5,7,8,10,14,15)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli IMPLICANTI PRINCIPALI della funzione.

Quindi la forma SP PRINCIPALE della funzione è:

$$f(A,B,C,D) = \overline{B}*\overline{D} + \overline{A}*D + \overline{A}*\overline{B} +$$
$$+ B*C*D + A*B*C + A*C*\overline{D}$$

Anche in questo caso la forma SP Principale è ridondante. Infatti:

$$\overline{A}*\overline{B} \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{B}*\overline{D} + \overline{A}*D$$

$$B*C*D \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{A}*D + A*B*C$$

$$A*C*\overline{D} \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{B}*\overline{D} + A*B*C$$

L'espressione trovata è riconducibile ad una forma di costo inferiore ***non ridondante*** *che è la seguente:*

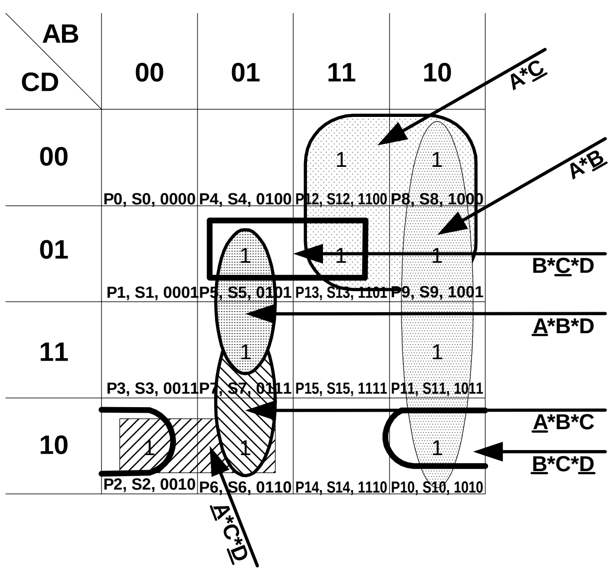
$$f(A,B,C,D) = \overline{B}*\overline{D} + \overline{A}*D + A*B*C$$

Tale espressione ha Costo in Porte 4 e Costo in Ingressi 10.

NOTA: Vi possono essere più espressioni non ridondanti di una stessa funzione ed il procedimento per trovarle tutte passa sempre per:

1) la ricerca di tutti gli IP della funzione;
2) la ricerca dei gruppi di IP per i quali è soddisfatta la condizione B), cioè per i quali nessun IP è coperto dalla somma di altri IP.

ESEMPIO 8: sia data la funzione: $f(A,B,C,D) = \sum(2,5,6,7,8,9,10,11,12,13)$



Tutti gli IMPLICANTI individuati nella Mappa sono PRINCIPALI, giacché nessuno è coperto completamente da un altro ***solo*** *implicante.*

Quindi la forma SP PRINCIPALE della funzione è:

$$f(A,B,C,D) = A*\overline{C} + A*\overline{B} + B*\overline{C}*D +$$
$$+ \overline{A}*B*D + \overline{A}*B*C + \overline{B}*C*\overline{D} + \overline{A}*C*\overline{D}$$

Anche in questo caso la forma SP Principale è ridondante. Infatti:

1) IP PRINCIPALI ridondanti:

$$B*\overline{C}*D \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot A*\overline{C} + \overline{A}*B*D$$

$$\overline{A}*B*C \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{A}*B*D + \overline{A}*C*\overline{D}$$

$$\overline{B}*C*\overline{D} \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{A}*C*\overline{D} + A*\overline{B}$$

Eliminando tutti gli IP ridondanti si ha la seguente ***FORMA SP PRINCIPALE NON RIDONDANTE****:*

$$f(A,B,C,D) = A*\overline{C} + A*\overline{B} + \overline{A}*B*D + \overline{A}*C*\overline{D}$$

Costo in porte: 5 Costo in Ingressi: 14.

2) IP PRINCIPALI ridondanti:

$\overline{A}*B*D \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot B*\overline{C}*D+\overline{A}*B*C$

$\overline{A}*C*\overline{D} \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{A}*B*C+\overline{B}*C*\overline{D}$

*Eliminando tutti gli IP ridondanti si ha la seguente **FORMA SP PRINCIPALE NON RIDONDANTE**:*

$$f(A,B,C,D)=A*\overline{C}+A*\overline{B}+B*\overline{C}*D+\overline{A}*B*C+\overline{B}*C*\overline{D}$$

Costo in porte: 6 Costo in Ingressi: 18.

3) IP PRINCIPALI ridondanti:

$\overline{A}*B*D \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot B*\overline{C}*D+\overline{A}*B*C$

$\overline{B}*C*\overline{D} \cdot è \cdot coperto \cdot da \cdot \overline{A}*C*\overline{D}+A*\overline{B}$

*Eliminando tutti gli IP ridondanti si ha la seguente **FORMA SP PRINCIPALE NON RIDONDANTE**:*

$$f(A,B,C,D)=A*\overline{C}+A*\overline{B}+B*\overline{C}*D+\overline{A}*B*C+\overline{A}*C*\overline{D}$$

Costo in porte: 6 Costo in Ingressi: 18.

Abbiamo trovato tre espressioni non ridondanti della nostra funzione.

Una di esse, la forma SP PRINCIPALE NON RIDONDANTE 1, è quella che garantisce la SINTESI OTTIMA o A COSTO MINIMO della nostra funzione logica.

Da quanto visto nell'ultimo esempio possiamo trarre la seguente conclusione:

Un'espressione non ridondante di una funzione può non essere a costo minimo, ma una forma a costo minimo è sicuramente non ridondante. In altre parole possiamo affermare che il fatto che un'espressione di una funzione logica sia non ridondante è una condizione NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE affinché tale espressione sia anche quella a costo minimo.

Sempre dall'ultimo esempio possiamo notare che gli IP non sono trattati tutti allo stesso modo; in particolare $A*\overline{C} \cdot e \cdot A*\overline{B}$ sono gli unici che hanno un 1 che non è coperto da nessun altro IP. Tali IP sono anche gli unici due che compaiono in tutte e tre le forme **SP PRINCIPALI NON RIDONDANTI** della nostra funzione logica.

Da quanto detto possiamo comprendere la classificazione degli IP che viene riportata di seguito:

Un IP è detto ESSENZIALE se copre almeno un 1 che non è coperto da nessun altro IP della funzione. Gli IP $A*\overline{C} \cdot e \cdot A*\overline{B}$ dell'ultimo esempio sono appunto IP ESSENZIALI. La somma di tutti gli IP ESSENZIALI di una funzione prende il nome di CUORE (CORE) della funzione. Nell'ultimo esempio il CUORE della funzione è quindi: $A*\overline{C}+A*\overline{B}$.

Un IP che è coperto dal CUORE della funzione è detto ASSOLUTAMENTE ELIMINABILE. Nell'ultimo esempio non ci sono IP di questo tipo.

Un IP che non è ESSENZIALE, né ASSOLUTAMENTE ELIMINABILE, è detto ELIMINABILE. Sono di questo tipo tutti gli IP non ESSENZIALI dell'ultimo esempio.

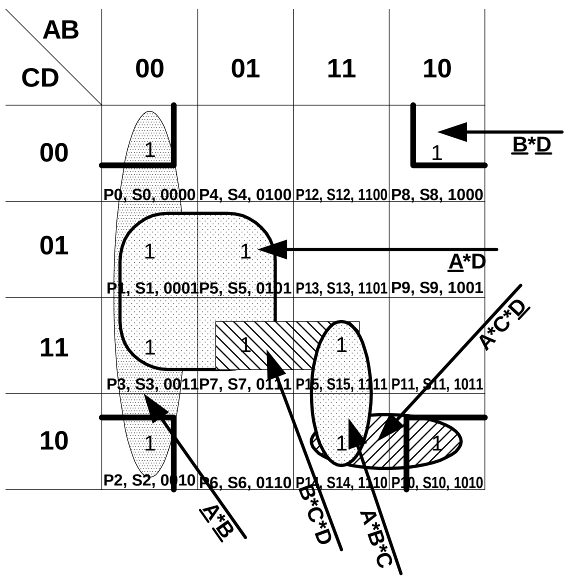
Da quanto detto finora e dalle ultime definizioni date possiamo individuare il **PROCEDIMENTO** per individuare tutte le espressioni **NON RIDONDANTI** di una funzione logica, tra le quali scegliere quella a **COSTO MINIMO**.

I passi da compiere sono nell'ordine:

1. **Individuare tutti gli IMPLICANTI PRINCIPALI della funzione;**
2. **Individuare tra tutti gli IP PRINCIPALI gli IP ESSENZIALI;**
3. **Individuare il CUORE della funzione;**
4. **Individuare gli IP ASSOLUTAMENTE ELIMINABILI. Di essi non si terrà più conto.**
5. **Tra tutti gli IP ELIMINABILI rimasti si scelgono tutti i possibili gruppi di IP in modo che**
   - ***Tutti gli 1 della funzione siano "coperti";***
   - ***Nessun IP del gruppo sia "coperto" dalla somma di altri IP.***

Applichiamo ora il procedimento ora descritto a gli ultimi due esempi precedenti:

ESEMPIO 7: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,3,5,7,8,10,14,15)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli IMPLICANTI PRINCIPALI della funzione.

Sono ESSENZIALI gli IP $\overline{B}*\overline{D}\cdot e\cdot\overline{A}*D$

L'IP $\overline{A}*\overline{B}$ *è ASSOLUTAMENTE ELIMINABILE dal momento che è coperto dal CUORE della funzione.*

I rimanenti IP sono ELIMINABILI.

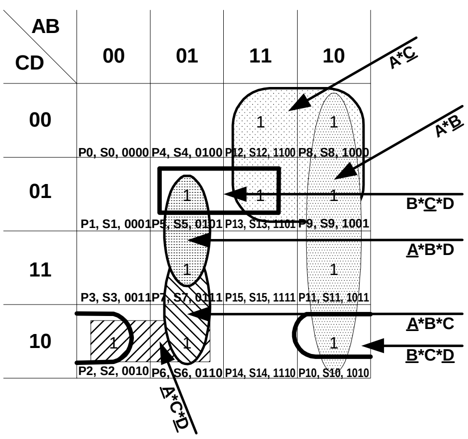
Per arrivare alla forma a costo minimo appare evidente che conviene eliminare $B*C*D\cdot e\cdot A*C*\overline{D}$ *e utilizzare* $A*B*C$

L'espressione ***non ridondante a costo minimo*** *è la seguente:*

$$f(A,B,C,D)=\overline{B}*\overline{D}+\overline{A}*D+A*B*C$$

Tale espressione ha Costo in Porte 4 e Costo in Ingressi 10.

ESEMPIO 8: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(2,5,6,7,8,9,10,11,12,13)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli implicanti principali della funzione.

Sono ESSENZIALI gli IP ***Errore. Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.***

Non ci sono IP ASSOLUTAMENTE ELIMINABILI.

Gli IP rimanenti sono tutti ELIMINABILI.

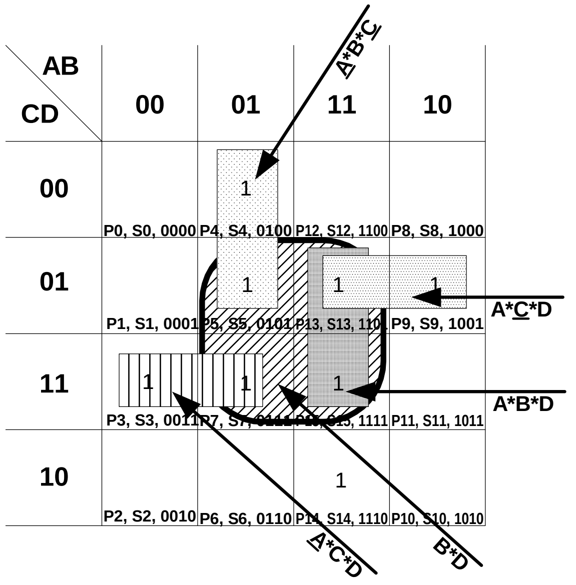
L'espressione non ridondante a costo minimo è la seguente:

$$f(A,B,C,D)=A*\overline{C}+A*\overline{B}+\overline{A}*B*D+\overline{A}*C*\overline{D}$$

Costo in porte: 5 Costo in Ingressi: 14.

Vediamo qualche altro esempio.

ESEMPIO 9: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(3,4,5,7,9,13,15)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli implicanti principali della funzione.

Sono ESSENZIALI gli IP:

$$\overline{A}*B*\overline{C}\cdot,\cdot A*\overline{C}*D\cdot,\cdot A*B*D\cdot,\cdot \overline{A}*C*D$$

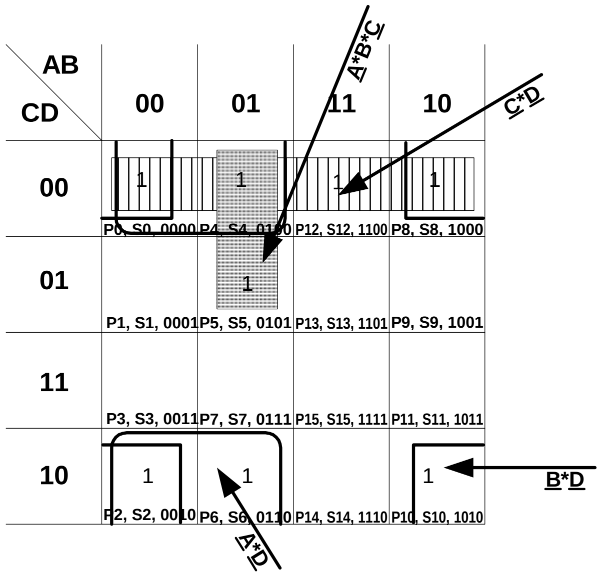
L'IP $B*D$ è ASSOLUTAMENTE ELIMINABILE dal momento che è coperto dal CUORE della funzione.

L'espressione **non ridondante a costo minimo** è la seguente:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*B*\overline{C}+A*\overline{C}*D+A*B*D+\overline{A}*C*D$$

Costo in porte: 5 Costo in Ingressi: 16.

ESEMPIO 10: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(0,2,4,5,6,8,10,12)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli implicanti principali della funzione.

Tutti gli IP presenti sono ESSENZIALI.

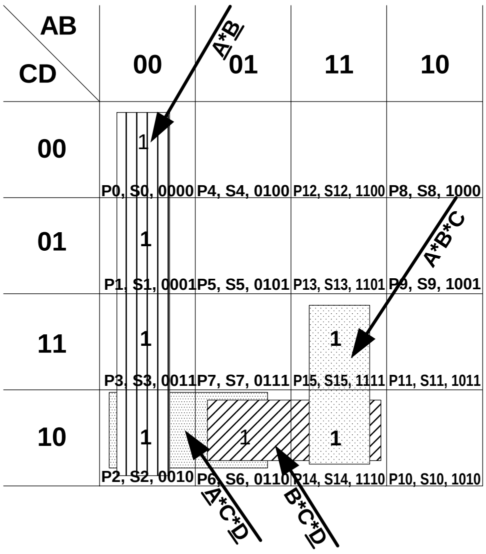
Quindi esiste una sola espressione per questa funzione logica, che, essendo unica, è anche **non ridondante a costo minimo.**

Essa è:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*B*\overline{C}+\overline{C}*\overline{D}+\overline{B}*\overline{D}+\overline{A}*\overline{D}$$

Costo in porte: 5 Costo in Ingressi: 13.

ESEMPIO 11: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,3,6,14,15)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli implicanti principali della funzione.

Sono ESSENZIALI gli IP:

$$\overline{A}*\overline{B}\cdot e\cdot A*B*C$$

Non ci sono IP ASSOLUTAMENTE ELIMINABILE.

Gli IP rimanenti sono tutti ELIMINABILI.

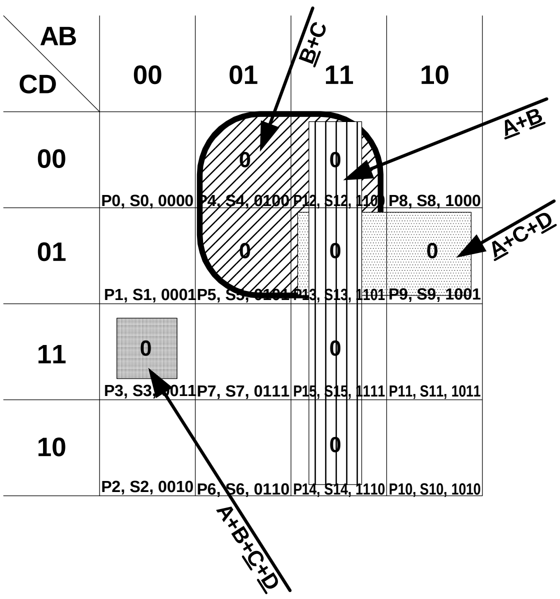
Le espressione **non ridondanti a costo minimo** sono le seguenti:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*\overline{B}+A*B*C+B*C*\overline{D}$$

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*\overline{B}+A*B*C+\overline{A}*C*\overline{D}$$

Costo in porte: 4 Costo in Ingressi: 11.

ESEMPIO 12: sia data la funzione: $f(A,B,C,D)=\prod(3,4,5,9,12,13,14,15)$



Nella Mappa in figura sono riportati tutti gli implicanti principali della funzione.

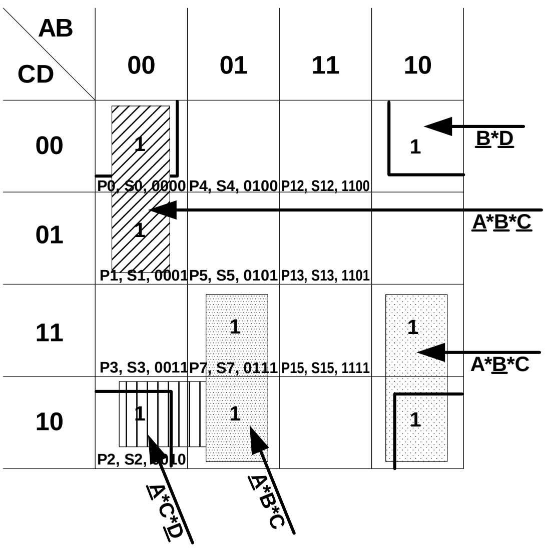
Tutti gli IP presenti sono ESSENZIALI.

Quindi esiste una sola espressione per questa funzione logica, che, essendo unica, è anche **non ridondante a costo minimo.**

Essa è:

$$f(A,B,C,D)=(\overline{B}+C)*(\overline{A}+\overline{B})*$$
$$*(\overline{A}+C+\overline{D})*(A+B+\overline{C}+\overline{D})$$

Costo in porte: 5 Costo in Ingressi: 15.



Nella Mappa accanto abbiamo preso in considerazione la stessa funzione logica ma partendo dagli 1.

Nella Mappa sono riportati tutti gli implicanti principali della funzione.

Sono ESSENZIALI gli IP:

$$\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}\cdot,\cdot\overline{B}*\overline{D}\cdot,\cdot A*\overline{B}*C\cdot,\cdot\overline{A}*B*C$$

L'IP $\overline{A}*C*\overline{D}$ è ASSOLUTAMENTE ELIMINABILE dal momento che è coperto dal CUORE della funzione.

L'espressione **non ridondante a costo minimo** è la seguente:

$$f(A,B,C,D)=\overline{A}*\overline{B}*\overline{C}+\overline{B}*\overline{D}+A*\overline{B}*C+\overline{A}*B*C$$

Costo in porte: 5 Costo in Ingressi: 15.

ESERCIZI DA SVOLGERE

LIBRO DI TESTO: pag. 123 n. 19 e pag. 132 n. 44 e 45.

Semplifica le seguenti funzioni logiche fino a trovare l'espressione non ridondante a costo minimo, il costo in porte ed il costo in ingressi. (Taub pagg. 73-76 e 499)**:**

$$f(A,B,C,D)=\sum\left(0,1,2,3,4,7,9,10\right)$$

$$f(A,B,C,D)=\sum\left(0,1,3,5,6,9,11,12,13,15\right)$$

$$f(A,B,C,D)=\sum\left(0,3,4,5,7,8,9,13,14,15\right)$$

$$f(A,B,C,D)=\prod(0,3,4,5,6,7,11,13,14,15)$$

$$f(A,B,C,D)=\sum\left(0,5,7,13,14,15\right)$$

$$f(A,B,C,D)=\sum\left(1,4,6,8,11,13,14\right)$$

$$f(A,B,C,D)=\prod(1,2,4,5,7,8,10,11,13,14)$$